Grundlagen der Mathematik – Lineare Algebra (Harder/Krause)

3. Übung 17.02.2007

---

1. *Aufgabe: Matrizenrechnung*

Gegeben sei die Matrix A

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -6 \\ 3 & 6{,}5 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. Zeigen Sie, daß A^{-1} gleich

$$\begin{pmatrix} -82 & -111 & -72 \\ 34 & 46 & 30 \\ -25 & -34 & -22 \end{pmatrix}$$

ist.

1.2. Lösen die das LG

$$A * \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.3. Zeigen Sie, daß

$$(A - 0{,}1 * A)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -91 & -123 & -80 \\ 38 & 51 & 33 \\ -28 & -38 & -24 \end{pmatrix}$$

gilt.

2. Aufgabe

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und die Vektoren $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Lösung des LGS $A \cdot x = b$

2.1 indem Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix (A | b) nach Gauß in die Dreiecksform umstellen.

2.2 mit dem Ansatz $x = A^{-1} \cdot b$. Bestimmen Sie dafür zunächst die inverse Matrix nach Gauß-Jordan mit dem Ansatz $(A \mid E)$.

3. Aufgabe

In einem Montagebetrieb werden aus vier Einzelteilen E_1, E_2, E_3 und E_4 drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 zusammengestellt, die dann zu drei Endprodukten P_1, P_2 und P_3 montiert werden.

In den beiden Verflechtungstabellen sind die für die Herstellung je eines Endproduktes benötigten Baugruppen bzw. Einzelteile angegeben:

	B_1	B_2	B_3
E_1	3	2	0
E_2	0	2	0
E_3	0	2	3
E_4	2	2	1

	P_1	P_2	P_3
B_1	2	0	1
B_2	1	2	2
B_3	0	3	2

Die Preise der Einzelteile betragen je Stück:

- für E_1 10 Geldeinheiten(GE),
- für E_2 15 GE,
- für E_3 30 GE und
- für E_4 25 GE.

Damit ist der Kostenvektor: $k_E^T = (10 \quad 15 \quad 30 \quad 25)$

Berechnen Sie unter Anwendung geeigneter Matrizenverknüpfungen die Materialkosten für die Herstellung von 100 P_1, 250 P_2 und 150 P_3.

4. Aufgabe

Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Produkte E1 und E2 her. Dabei sind die Produktionsfaktoren

- Rohmaterial [in t]
- Maschinen [in h]
- Und Arbeitskräfte [in h]

nur beschränkt verfügbar:

1. Für eine Einheit von E1 werden ***3 t*** Rohmaterial, für eine Einheit E2 ***9 t*** Rohmaterial benötigt. Insgesamt stehen höchstens **54 t** Rohmaterial zur Verfügung.
2. Für die Herstellung einer Einheit von E1 werden ***2 Arbeitsstunden*** benötigt. Das gleiche gilt für E2. Insgesamt stehen bis zu ***24 Arbeitsstunden*** zur Verfügung.
3. Die Maschinen des Betriebs benötigen für die Herstellung einer Einheit E1 ***1 Stunde***, für die Herstellung einer Einheit von E2 ***2 Stunden***. Insgesamt können sie höchstens 14 Stunden laufen.

Bestimmen Sie diejenige Mengenkombination von E1 und E2, welche unter den gegebenen Produktionsbedingungen den Gesamtgewinn maximiert, wenn der Gewinn für 1 Einheit von E1 ***6000 €*** und für 1 Einheit von E2 ***10000 €*** beträgt ?

1. Entwickeln Sie das mathematische Modell des linearen Optimierungsproblems !
2. Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus. Erläutern Sie dabei die Durchführung des Algorithmus.

5. Aufgabe

Eine Futtermittelmischung besteht aus den Futtermitteln F1, F2, F3, F4. Alle Futtermittel enthalten bestimmte Masseneinheiten ME-A, ME-B, ME-C bzw. ME-D der Nährstoffe A, B, C, D. Die Masseneinheiten an Nährstoffen je kg, die Kosten je kg der Futtermittel und der Mindestbedarf an Nährstoffen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

	Zahl der ME an Nährstoffen je kg in den Futtermitteln				Mindestbedarf
	F1	F2	F3	F4	[in ME]
ME-A	4	6	4	10	20
ME-B	2	4	0	4	24
ME-C	4	2	2	2	40
ME-D	2	2	0	2	30
Kosten/kg	10	8	12	6	**Min**

(1) Geben Sie das mathematische Modell des Minimumproblems an !
(2) Erläutern Sie den Begriff „Dualität“ !
(3) Geben Sie das zu dem Minimumproblem duale Maximumproblem an !
(4) Lösen Sie Aufgabe mit dem Simplexalgorithmus ! Erläutern Sie dabei das Simplexverfahren !