(2-1) *Logik-Gesetze beweisen*

Beweisen Sie das 1. DE MORGAN'sche Gesetz

(*) $-(p \wedge q) \quad \leftrightarrow \quad -p \vee -q$

mit Hilfe der Wahrheitstafel!

(2-1) Lösungsskizze

Wir erfassen zunächst systematisch die möglichen paarweisen Belegungen von p und q in der Wahrheitstafel.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Im ersten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von $p \wedge q$. Die Wahrheitswerte ergeben sich aus der Wertetabelle der Konjunktion ($\wedge$) und werden in Spalte (4) eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0		0				
0	1		0				
1	0		0				
1	1		1				

Im zweiten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von $-(p \wedge q)$. Diese ergeben sich aus der Umkehrung der Werte in Spalte (4) und werden in Spalte (3) eingetragen. In der Spalte (3) steht nun der Wahrheitswert der linken Seite von (*).

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0	1	0				
0	1	1	0				
1	0	1	0				
1	1	0	1				

Im dritten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von -p bzw. von -q. Diese ergeben sich aus der Umkehrung der Werte in Spalte (1) bzw. Spalte (2). Der Wert von -p wird in Spalte (6) , der Wert von -q in Spalte (8) eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	(p $\wedge$ q)	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0	1	0		1		1
0	1	1	0		1		0
1	0	1	0		0		1
1	1	0	1		0		0

Im vierten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von -p $\vee$ -q. Die Wahrheitswerte ergeben sich aus der Wertetabelle der Disjunktion ($\vee$) und werden in Spalte (7) eingetragen. Spalte (7) ist auch der Wahrheitswert der rechten Seite von (*).

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	(p $\wedge$ q)	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0	1	0		1	1	1
0	1	1	0		1	1	0
1	0	1	0		0	1	1
1	1	0	1		0	0	0

Abschließend vergleichen wir zeilenweise die Wahrheitswerte der linken Seite (Spalten (3)) mit der rechten Seite (Spalte(7)). Stimmen die Wahrheitswerte überein, tragen wir in der entsprechenden Zeile von (5) eine 1 ein. Ist der Wahrheitswert in allen Zeilen der Spalte (5) gleich 1, dann sind linke und rechte Seite von (*) äquivalent.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	-	(p $\wedge$ q)	$\leftrightarrow$	-p	$\vee$	-q
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0

Dies ist hier der Fall, also ist (*) bewiesen.