(2-2) *Logik-Term umformen*

Vereinfachen Sie die Funktion

$$XOR = (-p \wedge q) \vee (p \wedge -q)$$

(exklusives Oder) und zeigen Sie, daß

$$XOR = (p \vee q) \wedge (-p \wedge -q)$$

gilt.

(2-2) Lösungsskizze

XOR = $\mathbf{(-p \wedge q)} \vee (p \wedge -q)$

Auf Grund des 2. Distributivgesetzes gilt:

$\mathbf{(-p \wedge q)} \vee (p \wedge -q)$

➔ $(p \vee \mathbf{(-p \wedge q)}) \wedge (-q \vee \mathbf{(-p \wedge q)})$

Auf Grund des 2. Distributivgesetzes gilt weiterhin:

$(\mathbf{p} \vee (-p \wedge q)) \wedge (\mathbf{-q} \vee (-p \wedge q))$

➔ $((\mathbf{p} \vee -p) \wedge (\mathbf{p} \vee q)) \wedge ((\mathbf{-q} \vee -p) \wedge (\mathbf{-q} \vee q))$

Da

$(\mathbf{p} \vee -p) = 1$ und

$(\mathbf{-q} \vee q) = 1$

gilt

$(\mathbf{(p \vee -p)} \wedge (p \vee q)) \wedge ((-q \vee -p) \wedge \mathbf{(-q \vee q)})$

➔ $(1 \wedge (\mathbf{p} \vee q)) \wedge ((\mathbf{-q} \vee -p) \wedge 1)$

Wegen

$1 \wedge A = A$

gilt:

$(1 \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})) \wedge ((\mathbf{-q} \vee \mathbf{-p}) \wedge 1)$

➔ $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{-q} \vee \mathbf{-p})$

Dies sollte gezeigt werden. Mit dem De Morgan-Gesetz gilt weitergehend

$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{-q} \vee \mathbf{-p})$

➔ $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \mathbf{-(q \wedge p)}$

Der Lösungsweg läßt sich wie folgt zusammenfassen:

XOR = $\mathbf{(-p \wedge q)} \vee (p \wedge -q)$

➔ $(p \vee \mathbf{(-p \wedge q)}) \wedge (-q \vee \mathbf{(-p \wedge q)})$

➔ $((\mathbf{p} \vee -p) \wedge (\mathbf{p} \vee q)) \wedge ((\mathbf{-q} \vee -p) \wedge (\mathbf{-q} \vee q))$

➔ $(1 \wedge (\mathbf{p} \vee q)) \wedge ((\mathbf{-q} \vee -p) \wedge 1)$

➔ $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{-q} \vee \mathbf{-p})$