Grundlagen der Algebra III

Lineare Gleichungssysteme

1. Lösbarkeit eines Linearen Gleichungssystems

Das Lineare Gleichungssystem

(1)
$$\begin{aligned} -0{,}2\,x &+ 0{,}8\,y &= -2 \\ 0{,}2\,x &+ 0{,}2\,y &= 2 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar, da die ***Determinante***

(2)
$$\begin{vmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix}$$

$$= (-0{,}2 * 0{,}2) - (0{,}2 * 0{,}8)$$
$$= -0{,}2$$
$$=/= 0$$

gilt. (2) heißt ***Systemdeterminante*** des Linearen Gleichungssystems.
Das Lineare Gleichungssystem läßt sich in ***Matrizenschreibweise*** darstellen. Da

(3)
$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2\,x + 0{,}8\,y \\ 0{,}2\,x + 0{,}2\,y \end{pmatrix}$$

ist, läßt sich die linke Seite des Linearen Gleichungssystems (1) als Produkt von Matrix und Vektor darstellen. Es gilt:

(4)
$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Lösbarkeit eines Linearen Gleichungssystems

Diese Lösung des Linearen Gleichungssystems läßt sich mit Hilfe der inversen Matrix leicht bestimmen. Die Inverse Matrix kann mit Hilfe von Algorithmen oder Programmen bestimmt werden.

2.1. Bestimmung der Inversen Matrix

Hier gilt:

(5)
$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow$$

Ermittlung der Inversen Matrix mittels Gauss-Jordan-Algorithmus
oder der Funktion =MINV({-0,2.0,8;0,2.0,2})

(6)
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Bestimmung ded Lösungsvektors

Dann ergibt sich der Lösungsvektor wie folgt:

(7) $$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 * (-2) + 4 * 2 \\ 1 * (-2) + 1 * 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>2.3. Prüfung der Inversen Matrix</u>

Wir können die Inverse Matrix mit der Systemmatrix multilpizieren und erhalten die Einheitsmatrix.

(8) $$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 * (-0{,}2) + 4 * 0{,}2 & -1 * 0{,}8 + 4 * 0{,}2 \\ 1 * (-0{,}2) + 1 * 0{,}2 & 1 * 0{,}8 + 1 * 0{,}2 \end{bmatrix}$$

(9) $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$