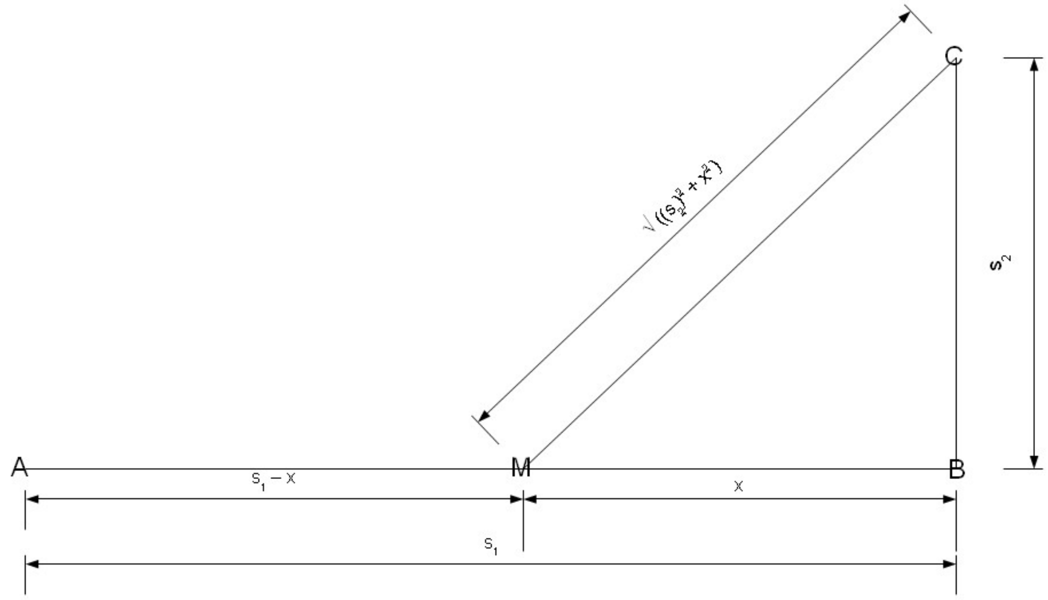
Extremwertaufgabe (1)

Eine Leitung soll gemäß nachfolgender Planungsskizze von A nach C verlegt werden. Dabei fallen bei der Verlegung der Leitung längs der Strecke $\overline{AB}$ Kosten K_1, bei der Verlegung der Leitung abseits der Strecke $\overline{AB}$ Kosten K_2 an. Gesucht wird die Position des Punktes M, so daß die Kosten der Strecke $\overline{AMC}$ minimal werden.



Lösung

1. Zielfunktion

Bezeichne x die Strecke $\overline{MB}$, s_1 die Strecke $\overline{AM}$ und s_2 die Strecke $\overline{BC}$, dann ist die Länge der abseits von $\overline{AB}$ zu verlegende Strecke $\overline{MC}$ gleich

$$\sqrt{(x^2 + (s_2)^2)}$$

Die Kosten für den Streckenabschnitt $\overline{AM}$ belaufen sich dann auf

$$K_1 * (s_1 - x)$$

Die Kosten für den Streckenabschnitt $\overline{MC}$ auf

$K_2 * \sqrt{(x^2 + (s_2)^2)}$

Die Zielfunktion ist die Summe der Kosten der beiden Teilstrecken. Es ist dann

$$K(x) = K_1 * (s_1 - x) + K_2 * \sqrt{(x^2 + (s_2)^2)} \longrightarrow \textbf{Min}$$

2. Ableitungsfunktion

Die 1. Ableitungsfunktion von K ist dann

$$\begin{aligned} {}^{d}/_{dx}\, K(x) &= - K_1 + K_2 * 2x * \tfrac{1}{2} \;/\; \sqrt{(x^2 + (s_2)^2)} \\ &= - K_1 + K_2 * x \;/\; \sqrt{(x^2 + (s_2)^2)} \end{aligned}$$

3. Lage der lokalen Extrema

Ist x_E Extremstelle von K(x), dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= - K_1 + K_2 * x_E \;/\; \sqrt{(x_E^2 + (s_2)^2)} \\ \Leftrightarrow \quad + K_1 &= + K_2 * x_E \;/\; \sqrt{(x_E^2 + (s_2)^2)} \\ \Leftrightarrow \quad + K_1 \sqrt{(x_E^2 + (s_2)^2)} &= + K_2 * x_E \\ \Leftrightarrow \quad (K_1)^2 * (x_E^2 + (s_2)^2) &= (K_2)^2 * x_E^2 \\ \Leftrightarrow \quad (K_1)^2 * x_E^2 + (K_1)^2 * (s_2)^2 &= (K_2)^2 * x_E^2 \\ \Leftrightarrow \quad (K_1)^2 * x_E^2 - (K_2)^2 * x_E^2 &= - (K_1)^2 * (s_2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad x_E^2 * ((K_1)^2 - (K_2)^2) &= - (K_1)^2 * (s_2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad - x_E^2 * ((K_2)^2 - (K_1)^2) &= - (K_1)^2 * (s_2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad x_E^2 &= (K_1)^2 * (s_2)^2 \;/\; ((K_2)^2 - (K_1)^2) \end{aligned}$$

4. Berechnung des Kostenminimus

Mit den Lösungen

$$x_{E1} = + \sqrt{\left[(K_1)^2 * (s_2)^2 \;/\; ((K_2)^2 - (K_1)^2) \right]}$$

$$x_{E2} = -\sqrt{\left[(K_1)^2 * (s_2)^2 \;/\; ((K_2)^2 - (K_1)^2) \right]}$$

gilt wegen $K_2 > K_1$ dann $x_{E2} < 0$. Das Kostenminimum K_{min} ist daher gegeben durch

$$K_{min} = K(x_1) = K_1 * (s_1 - x_1) + K_2 * \sqrt{((x_1)^2 + (s_2)^2)}$$