4.4. Binomialverteilung

4.4.a Defekte Bauteile in Abhängigkeit von p

Die Zufallsvariable X zähle die defekten Bauteile in der Stichprobe. Den Anteil bzw. Wahrscheinlichkeit, daß ein Bauteil defekt ist, schätzen wir aus der Stichprobe durch

$$p \approx \frac{X}{n}$$

Man kann hier davon ausgehen, daß der Stichprobenumfang n hinreichend groß ist, um die Laplace-Näherung anzuwenden. Dann gilt

$$W\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq 0{,}05 \cdot n \right) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow W\left(\left| X - n \cdot p \right| \leq 0{,}05 \cdot n \right) \geq 0{,}95$$

Wegen $\left| X - n \cdot p \right| \leq 0{,}05 \cdot n \rightarrow (-0{,}05 \cdot n \leq X - n \cdot p \leq 0{,}05 \cdot n)$ gilt

$$\rightarrow \quad W\ (-0{,}05 \cdot n \leq X - n \cdot p \leq 0{,}05 \cdot n) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (-X - 0{,}05 \cdot n \leq -n \cdot p \leq -X + 0{,}05 \cdot n) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (X + 0{,}05 \cdot n \geq n \cdot p \geq X - 0{,}05 \cdot n) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (X - 0{,}05 \cdot n \leq n \cdot p \leq X + 0{,}05 \cdot n) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (X - 0{,}05 \leq n \cdot p) - W\ (n \cdot p \leq X + 0{,}05) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (X - 0{,}05 \cdot n \leq n \cdot p) - W\ (-X - 0{,}05 \cdot n \leq n \cdot p) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad W\ (X \leq n \cdot p + 0{,}05 \cdot n) - W\ (-X \leq n \cdot p + 0{,}05 \cdot n) \geq 0{,}95$$

$$\rightarrow \quad \Phi_0\left(\frac{n \cdot p + 0{,}05 \cdot n + 1/2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) - \Phi_0\left(-\frac{n \cdot p + 0{,}05 \cdot n + 1/2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) \geq 0{,}95$$

Wegen $\Phi_0(x) - \Phi_0(-x) = 2 \cdot \Phi_0(x) - 1$ folgt daraus

$$2 \cdot \Phi_0\left(\frac{0{,}05 \cdot n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) - 1 \geq 0{,}95$$

Dies ist dann der Fall, wenn

$$\frac{0{,}05\cdot n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \geq 1{,}96$$

Dann gilt

$$0{,}05\cdot n+\frac{1}{2} \;\geq\; 1{,}96\cdot\sqrt{\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})}$$

$\rightarrow$ $$0{,}05\cdot\sqrt{n}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}} \;\geq\; 1{,}96\cdot\sqrt{\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})}$$

Vernachlässigt man den Summanden $\frac{1}{2\cdot\sqrt{\mathrm{n}}}$, der für wachsendes n kleiner als 1 wird und gegen o strebt, dann läßt sich n so bestimmen, daß

$$\sqrt{n^*} \;\geq\; \frac{1{,}96}{0{,}05}\cdot\sqrt{\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})} \;=\; 39{,}2\cdot\sqrt{\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})}$$

gilt. Daraus folgt

(*) $$n^* \;\geq\; 1536{,}64\,\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})$$

4.4.b n^* für unbekanntes p

Wenn man keinen Wert für *p* hat oder keine Voraussetzungen für *p* machen kann, muß man von dem größtmöglichen Wert dafür *p (1-p)* ausgehen.

Das Produkt *p (1-p)* wird für *p* = ½ maximal und nimmt den Wert ¼ an. Dann liefert die Ungleichung 4.4.a (*) den Wert

$$\mathrm{n}^* \geq 385$$

4.4.c n für p = 0,2

Unter der Voraussetzung *p = 1/5* nimmt das Produkt *p (1-p)* den Wert *4/25* an. Dann liefert 4.4.a (*) den Wert

$$\mathrm{n}^* \geq 246$$