Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Aufträge. Die durchschnittliche Anzahl der Aufträge ist [1]

$$E(X) = \boldsymbol{Ps_5}(0) + \boldsymbol{Ps_5}(1) + \boldsymbol{Ps_5}(2) \ldots + \boldsymbol{Ps_5}(n)$$
$$= 5$$

Bezeichne A die Höhe der Ausgaben des Betriebs [pro Tag in €] und I die Höhe der Einnahmen des Betriebs [pro Tag in €]. Die durchschnittlichen Einnahmen pro Auftrag und Tag betragen 360 €. Die durchschnittlichen gesamten Einnahmen pro Tag $\boldsymbol{I_{Gesamt}}$ sind dann

$$\begin{aligned} E(I_{Gesamt}) &= E(X) * E(I) \\ &= 5 * 360 \text{ [€]} \\ &= 1800 \text{ [€]} \end{aligned}$$

K_X bezeichne die Höhe der Kosten. Die durchschnittlichen Kosten für $\boldsymbol{k} \geq 0$ ausgeliehene Ingenieure pro Tag sind dann allgemein [2]

$$E(K_{X,k}) = 480 * \sum_{i=1}^{n-k} Ps(X = k+i) * i \text{ [€]}$$

Wir verdeutlichen diesen Sachverhalt exemplarisch. Wir erstellen für k = 0, 1, 2, 3, ... ***n*** Funktionen, die die Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der fest angestellten Ingenieure ausdrücken. Sei zunächst $k = 0$, d.h. kein Ingenieur sei fest angestellt. Erhält der Betrieb einen Auftrag, müssen alle k Ingenieure ausgeliehen werden. Dann entstehen die Kosten

$$E(K_{X,k=0}) = E(\mathit{KostenProIngenieur}) * E(X)$$

---

1 $\boldsymbol{Ps_\lambda}(k)$ bezeichne die Dichtefunktion, $\boldsymbol{ps_\lambda}(k)$ die Summenfunktion der Poissonverteilung mit dem Parameter $\boldsymbol{\lambda}$.

2 Bei der praktischen Berechnung der Funktionswerte beschränken wir uns auf die Summierung von maximal k = 13 Summanden.

©Harder 2006

$$= 480 * \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ps(X= 0+i) * i} \ [€]$$

$$= 480 * (W(X= 1) * 1 + ... + W(X= 13) * 13 \ \mathbf{+...+} \ W(X= \boldsymbol{n}) * \boldsymbol{n}) \ [€]$$

Bei 0 fest angestellten Mitarbeitern ergibt sich für bis zu 13 "Ausleihungen" also der folgende Kostenvektor.

0+i	***Ps(X= k+i) * i [€]***
1	16,17
2	80,86
3	202,14
4	336,90
5	421,12
6	421,12
7	350,93
8	250,67
9	156,67
10	87,04
11	43,52
12	19,78
13	8,24

Insgesamt betragen die variablen Kosten für die Ausleihe von bis zu 13 Ingenieuren bei k=0 fest angestellten Ingenieuren insgesamt 2395,15 €.

Sei nun ***k = 1***, d.h. nur 1 Ingenieur sei fest angestellt. Erhält der Betrieb mehr als einen Auftrag, müssen alle k > 1 dafür nötigen Ingenieure ausgeliehen werden. Dann entstehen die Kosten

$$E\ (K_{X,k=1}) \qquad = E\ (\mathit{KostenProIngenieur}) * E(X)$$

$$= 480 * \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{Ps(X= 1+i) * i} \ [€]$$

$$= 480 * (W(X= 2) * 1 + ...+ W(X= 13) * 12 +...+ W(X= \boldsymbol{n}) * (\boldsymbol{n}-1)) \ [€]$$

©Harder 2006

Bei einem (k=1) fest angestellten Mitarbeiter ergibt sich für bis zu 13 "Ausleihungen" also folgender Kostenvektor.

k+i	*Ps(X= k+i) * i [€]*
2	40,43
3	134,76
4	252,67
5	336,90
6	350,93
7	300,80
8	219,33
9	139,26
10	78,33
11	39,56
12	18,13
13	7,61

Insgesamt betragen die variablen Kosten für die Ausleihe von bis zu 13 Ingenieuren bei k=1 fest angestellten Ingenieuren insgesamt 1918,72 €.

Sei nun ***k = 2***, d.h. nur 2 Ingenieure seien fest angestellt. Erhält der Betrieb mehr als einen Auftrag, müssen alle k > 2 dafür nötigen Ingenieure ausgeliehen werden. Dann entstehen die Kosten

$$E\,(K_{X,k=2}) = E\,(\mathit{KostenProIngenieur}) * E(\,X)$$

$$= 480 * \sum_{i=1}^{n-2} \boldsymbol{Ps(\,X= 2+i\,) * i}\ [€\,]$$

$$= 480 * (\,W(\,X= 3) * 1 + \ldots + W(\,X= 13) * 11 + \ldots + W(\,X= \boldsymbol{n}) * (\boldsymbol{n-2}))\ [€\,]$$

Bei k=2 fest angestellten Mitarbeitern ergibt sich für bis zu 13 "Ausleihungen" also folgender Kostenvektor.

k+i	*Ps(X= k+i) * i [€]*
3	67,38
4	168,45
5	252,67
6	280,75
7	250,67
8	188,00
9	121,85
10	69,63

11	35,61
12	16,48
13	6,97

Insgesamt betragen die variablen Kosten für die Ausleihe von bis zu 13 Ingenieuren bei 2 fest angestellten Ingenieuren insgesamt 1462,64 €.

Entsprechende Funktionen lassen sich für alle weiteren ***k*** analog formulieren. Wir bestimmen nun noch die Kostenfunktion für k = 6, d.h. wir nehmen an, nur 6 Ingenieure seien fest angestellt. Erhält der Betrieb mehr als einen Auftrag, müssen alle k > 6 dafür nötigen Ingenieure ausgeliehen werden. Dann entstehen die Kosten

$$E(K_{X,k=6}) = E(\mathit{KostenProIngenieur}) * E(X)$$

$$= 480 * \sum_{i=1}^{n-6} \boldsymbol{Ps(X = 6+i) * i} \; [€]$$

$$= 480 * (W(X=7) * 1 + ... + W(X=n) * (\boldsymbol{n}-6) \; [€]$$

$$= 480 * (\boldsymbol{Ps}(7) * 1 + ... + \boldsymbol{Ps}(13) * 7 + ... + W(X=\boldsymbol{n}) * (\boldsymbol{n-6})) \; [€]$$

Bei 6 fest angestellten Mitarbeitern ergibt sich für bis zu 13 "Ausleihungen" also folgender Kostenvektor.

k+i	***Ps(X= k+i) * i [€]***
7	50,13
8	62,67
9	52,22
10	34,81
11	19,78
12	9,89
13	4,44

Die durchschnittlichen variablen Kosten pro Tag für 6 ausgeliehene Ingenieure bei nur 6 fest angestellten Ingenieuren sind dann

$$E(K_{X,k=6}) = 480 * (\boldsymbol{Ps_5}(7) * 1 + \boldsymbol{Ps_5}(8) * 2 + ... + \boldsymbol{Ps_5}(13) * 7) \; [€]$$

$$= 0{,}104 * 1 + 0{,}064 * 2 + ... + 0{,}0013 * 7 \; [€]$$

©Harder 2006

= 233,95 [€]

Zusammenfassend ergibt sich nun die folgende tabellarische Darstellung der variablen Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der fest angestellten Mitarbeiter[3]:

Fest angest. Ing.➔

k ↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1	16,17										
2	80,86	40,43									
3	202,14	134,76	67,38								
4	336,90	252,67	168,45	84,22							
5	421,12	336,90	252,67	168,45	84,22						
6	421,12	350,93	280,75	210,56	140,37	70,19					
7	350,93	300,80	250,67	200,53	150,40	100,27	50,13				
8	250,67	219,33	188,00	156,67	125,33	94,00	62,67	31,33			
9	156,67	139,26	121,85	104,44	87,04	69,63	52,22	34,81	17,41		
10	87,04	78,33	69,63	60,93	52,22	43,52	34,81	26,11	17,41	8,70	
11	43,52	39,56	35,61	31,65	27,69	23,74	19,78	15,82	11,87	7,91	3,96
12	19,78	18,13	16,48	14,84	13,19	11,54	9,89	8,24	6,59	4,95	3,30
13	8,24	7,61	6,97	6,34	5,71	5,07	4,44	3,80	3,17	2,54	1,90
ZS	2395,15	1918,72	1458,46	1038,63	686,18	417,95	233,95	120,13	56,45	24,10	9,16
14	3,17	2,94	2,72	2,49	2,26	2,04	1,81	1,59	1,36	1,13	0,91
15	1,13	1,06	0,98	0,91	0,83	0,75	0,68	0,60	0,53	0,45	0,38
16	0,38	0,35	0,33	0,31	0,28	0,26	0,24	0,21	0,19	0,17	0,14
17	0,12	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05
18	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
19	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	2400,00	1923,23	1462,64	1042,47	689,68	421,12	236,78	122,63	58,61	25,93	10,65

Dazu berechnen wir auch die durch die fest angestellten Ingenieure verursachten fixen Kosten. In Abhängigkeit von der Anzahl der fest angestellten Ingenieure gilt:

K_{fix} (X, k= 0) = 0 * 90 [€]

K_{fix} (X, k= 1) = 1 * 90 [€]

...

K_{fix} (X, k= 6) = 6 * 90 = 540 [€]

[3] Verkürzte Darstellung. In der Tabelle sind die Werte für maximal 10 fest angestellte Mitarbeiter dokumentiert. (ZS: Zwischensumme für k ≤13).

©Harder 2006

Daraus ergibt nun auch die folgende Tabelle der Gesamtkosten Abhängigkeit von der Anzahl der fest angestellten Ingenieure

Fest angest. Ing.➔

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_{fix}	0	90	180	270	360	450	540	630	720	810	900
$K_{X,k}$	2400,00	1923,23	1462,64	1042,47	689,68	421,12	236,78	122,63	58,61	25,93	10,65
ΣK	2400,00	2013,23	1642,64	1312,47	1049,68	871,12	776,78	752,63	778,61	835,93	910,65

Der durchschnittliche Gewinn pro Tag ist dann z.B. für k=6 fest angestellte Ingenieure gleich

$$E\,(G_{X,\,k=6}) = 1800 - 540 - 236{,}10\ [€\,]$$
$$= 1023{,}90\ [€\,]$$

Die durchschnittlichen Gewinne ("*Erwartungswert des Gewinns*") für die verschiedenen Anzahlen k = 0, 1, ...10 fest angestellter Ingenieure ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

Fest angest. Ing.➔

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_{Gesamt}	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00	1800,00
$G_{X,k}$	-600,00	-213,23	157,36	487,53	750,32	928,88	1023,22	1047,37	1021,39	964,07	889,35

Aus der nachstehenden Graphik mit

- Der Funktion $\mathbf{K_{X,k}}$ "(*variable) Kosten für Ausleihe von Ingenieure in Abhängigkeit von der Anzahl fest angestellter Ingenieure*"
- Der Funktion $\mathbf{G_{X,k}}$ *"Erwartungswert des Gewinns in Abhängigkeit von der Anzahl fest angestellter Ingenieure*"

ergibt sich anschaulich, daß der höchste Gewinn dann erzielt wird, wenn der Betrieb, der unter den o.g. Rahmenbedingungen wirtschaftet, genau 7 Ingenieure fest anstellt und für 8 und mehr Aufträge pro Tag weitere Ingenieure "ausleiht".

©Harder 2006

Grraphische Darstellung